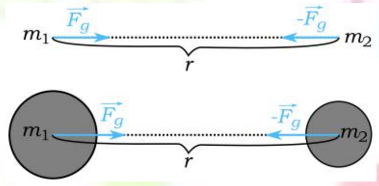
Kapitola 5:
GRAVITAČNÍ POLE

- všechna tělesa jsou přitahována k Zemi – míč vyhozený vzhůru padá k zemi, kovadlina na nohu, ptačí trus na rameno a družice obíhající Zemi samovolně neodletí – příčinou tohoto všeho je gravitační síla Země

Základní pojmy

gravitace = fyzikální jev vznikající na základě vzájemného působení gravitačních polí (gravitační síly) hmotných objektů (gravitační pole se nachází v okolí všech hmotných těles)



působení gravitační síly u hmotných bodů a homogenních koulí

gravitační síla ($\vec{F}_g$) = jeden z typů síly, tedy vektorová veličina, konkrétně se jedná o přitažlivou sílu působící mezi dvěma hmotnými body nebo mezi dvěma homogenními koulemi

- jednotkou je newton, $[F_g]$ = N = kg.m.s^{-2}
- velikost gravitační síly F_g je dána vztahem: $F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2}$, kde m_1 a m_2 jsou hmotnosti dvou hmotných bodů nebo dvou homogenních koulí, r vzdálenost mezi nimi a κ **je gravitační konstanta**
    - κ udává, jakou silou se přitahují dvě tělesa o hmotnosti jeden kilogram ve vzdálenosti jeden metr od sebe
    - její hodnota je $\kappa = 6{,}67 . 10^{-11}\, N.m^2.kg^{-2}$ (jednotku konstanty lze odvodit ze vztahu pro gravitační sílu, tedy: $F_g = \kappa \frac{m_1 m_2}{r^2} \rightarrow \kappa = \frac{F_g r^2}{m_1 m_2} \rightarrow \frac{N.m^2}{kg.kg} = \mathrm{N.m^2.kg^{-2}}$)
- platí **Newtonův gravitační zákon**:

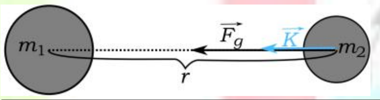
„Každá dvě tělesa se navzájem přitahují stejně velkými gravitačními silami $\vec{F}_g$, -$\vec{F}_g$ opačného směru."

→ každá dvě hmotná tělesa na sebe tedy působí stejně velkými silami opačného směru, kterými se přitahují (příkladem je Slunce a Země, člověk a Země)

gravitační zrychlení ($\vec{a}_g$) = zrychlení, které je uděleno gravitační silou tělesům v gravitačním poli

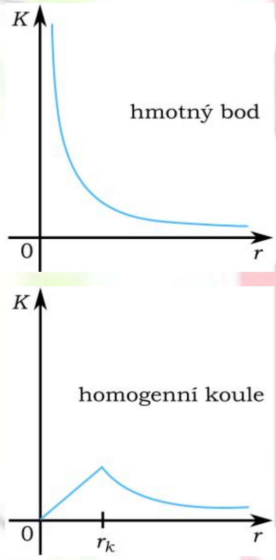
- jednotkou jsou $[a_g]$ = m.s^{-2}
- jeho směr můžeme vyjádřit jako: $\vec{a}_g = \frac{\vec{F}_g}{m}$, jeho velikost poté ukazuje vztah $a_g = \frac{F_g}{m} = \kappa \frac{\frac{M m}{r^2}}{m} = \kappa \frac{M}{r^2}$

intenzita gravitačního pole ($\vec{K}$) = vektorová veličina charakterizující gravitační pole v jednotlivých bodech prostoru



intenzita gravitačního pole

- jednotkou je newton na kilogram, $[K]$ = N.kg^{-1} = kg.m.s^{-2} . kg^{-1} = m.s^{-2}
- pomocí gravitačního zákona jsme schopni zjistit sílu, jakou na sebe **dvě tělesa** (tedy dvě pole) působí, ale pokud určujeme vlastnosti gravitačního pole **pouze jednoho**, je k popsání lepší použít intenzitu gravitačního pole
- její směr je definován jako: $\vec{K} = \frac{\vec{F}_g}{m}$ → její směr je tedy dán orientací gravitační síly $\vec{F}_g$
- vztah pro velikost intenzity je shodný se vztahem pro výpočet gravitačního zrychlení $\vec{a}_g$: $K = \frac{F_g}{m} = \kappa \frac{\frac{M m}{r^2}}{m} = \kappa \frac{M}{r^2} = a_g$
    - závislost velikosti intenzity a vzdálenosti se dá vyjádřit grafu, kde vidíme, že:
        - u hmotného bohu intenzita se vzdáleností klesá
        - u homogenní koule nejprve intenzita roste, v bodě, kdy se vzdálenost od středu koule rovná poloměru koule (r_k) se růst zastaví a intenzita se vzdáleností klesá



graf pro závislost intenzity gravitačního pole a vzdálenosti

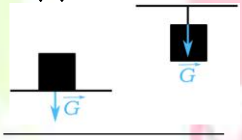
siločáry = myšlené čáry, pomocí kterých můžeme vyjádřit intenzitu gravitačního pole a směr vektoru gravitační síly

tíhová síla ($\vec{F}_G$) = síla, která se nachází v okolí povrchu Země (v tíhovém poli) a všechna tělesa jsou jí k Zemi přitahována

- jednotkou je newton, $[F_g]$ = N = kg.m.s^{-2}
- působištěm tíhové síly je těžiště těles (matematicky se jedná o průsečík těžnic)
- neplést se silou gravitační ($\vec{F}_g$)!! – rozdíl mezi nimi si ukážeme na následující straně

tíhové zrychlení ($\vec{g}$) = typ zrychlení, které je způsobeno působením tíhové síly
- směr je shodný se směrem působení tíhové síly (nemusí ale mířit do středu Země – ukážeme si později)
- platí: $\vec{g} = \frac{\vec{F}_G}{m}$ (z druhého Newtonova pohybového zákona) a jeho přibližná hodnota je $\boldsymbol{g = 9{,}81\ m.s^{-2}}$

tíha ($\vec{G}$) = veličina úzce spojená s tíhovou silou – je to síla, kterou působí jedno těleso na jiná tělesa v tíhovém poli

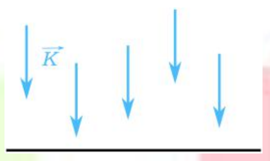


tíha

- např. závěs na háček, na kterém je zavěšen, nebo kniha na lavici
- důležité je, kde tíha působí – v inerciálních vztažných soustavách je shodná s tíhovou silou, ale v neinerciálních vztažných soustavách ne (př. výtahy – jak na člověka, tak na výtah působí tíhová síla, člověk na kabinu ale nepůsobí tíhou)

Typy gravitačních polí

HOMOGENNÍ GRAVITAČNÍ POLE

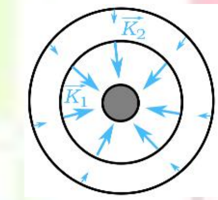


intenzita homogenního pole

- neskutečné, idealizované gravitační pole
- jeho intenzita je ve všude stejně velká a s rostoucí vzdáleností od tělesa se její hodnota nemění
- za homogenní gravitační pole můžeme považovat prostor v blízkosti povrchu Země (řekněme do výšky několika set metrů) – homogenní gravitační pole uvažujeme u kinematiky, např. u vrhů

CENTRÁLNÍ (RADIÁLNÍ) GRAVITAČNÍ POLE

- skutečné gravitační pole nacházející se v okolí hmotných bodů či homogenních koulí
- vektor intenzity směřuje do středu koule a jeho velikost se s rostoucí vzdáleností od středu koule (hmotného bodu) zmenšuje $\vec{K}_1 > \vec{K}_2$
- např. gravitační pole Země nebo Slunce (pokud bychom Zemi či Slunce považovali za stejnorodou kouli o určitém poloměru a hmotnosti)



intenzita centrálního pole

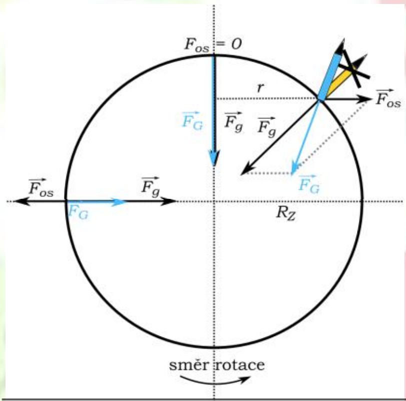
Gravitační pole Země

- nachází se kolem Země
- **velikost gravitační síly** Země se dá vyjádřit jako: $F_{g\,Z} = \kappa \frac{M_Z\, m}{r^2}$, kde M_Z je hmotnost Země ($\boldsymbol{M_Z = 5{,}98.10^{24}\ kg}$), m je hmotnost tělesa, r je vzdálenost od středu Země → tedy $\boldsymbol{r = R_Z + h}$, kde R_Z je poloměr Země ($R_Z = 6{,}378.10^6\ m$) a h je výška tělesa nad Zemí
- velikost intenzity se poté dá vyjádřit jako $K = \kappa \frac{M_Z}{r^2}$, kde K je intenzita gravitačního pole

TÍHOVÁ A GRAVITAČNÍ SÍLA NA POVRCHU ZEMĚ

- na všechna tělesa nacházející se na Zemi působí tíhová a gravitační síla – jaký je v nich ale rozdíl?

- × **<u>gravitační síla</u>** – síla směřující přímo do středu Země, platí: $F_g = \kappa \frac{M_Z\, m}{{R_Z}^2}$
- × **<u>setrvačná odstředivá síla</u>** – síla způsobená otáčením Země kolem své osy, směřuje kolmo od této osy a vyjádříme ji jako $F_{os} = \frac{m\, v^2}{r} = m\, \omega^2\, r$, kde r je vzdálenost od osy otáčení (na rovníku je rovna R_Z, na pólech je rovna nule, proto zde žádná setrvačná síla nepůsobí)
  - tato síla je mnohem menší než gravitační
- × **<u>tíhová síla</u>** – výslednice těchto dvou sil - $\vec{F}_G = \vec{F}_g + \vec{F}_{os}$



rozdíl mezi tíhovou a gravitační silou

- ukažme si tři polohy na Zemi a v nich silové působení:

a) **<u>na pólu</u>** – na zeměpisných pólech nepůsobí síla odstředivá, tedy síla gravitační ($\vec{F}_g$) je rovna síle tíhové ($\vec{F}_G$), $\boldsymbol{\vec{F}_g = \vec{F}_G}$

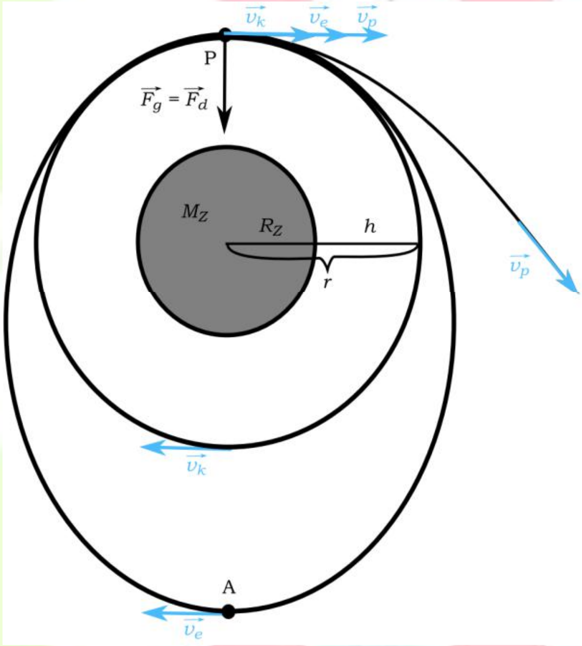
b) **<u>na rovníku</u>** – na rovníku je naopak odstředivá síla ze všech poloh na zemském povrchu největší, tyto síly jsou opačné, proto podle skládání sil opačného směru nám jde výslednice k síle gravitační: $\boldsymbol{\vec{F}_g - \vec{F}_{os} = \vec{F}_G}$

c) **<u>kdekoli jinde na zemské povrchu</u>** – ve kterékoli jiné poloze než na rovníku a pólu musíme k zjištění tíhové síly sílu gravitační a odstředivou doplnit na vektorový rovnoběžník, jak můžeme vidět na obrázku

- tělesa ne Zemi se tedy nenachází v gravitačním poli Země, ale v poli tíhovém (např. budovy na Zemi se staví ve směru vektoru síly tíhové, ne gravitační)

POHYBY TĚLES V CENTRÁLNÍM POLI ZEMĚ

- u těchto pohybů jsou rozměry trajektorií pohybů porovnatelné s rozměry planety Země



pohyby tělesa v centrálním poli Země

a) pohyb po kružnici kolem Země

- pohyby těles, která krouží okolo Země
- tato kružnice má střed ve středu Země a má poloměr velikosti $r = R_Z + h$, kde R_Z je poloměr Země a h je výška nad Zemí, která je oproti R_Z malá
- v této výšce h působí na těleso dvě síly – jejich velikosti jsou stejné, proto se těleso nezřítí ani neuletí pryč:
  - **gravitační síla:** $F_g = \kappa \frac{M_Z m}{{R_Z}^2}$
  - **dostředivá síla:** $F_d = \frac{m {v_k}^2}{r}$, kde v_k je **kruhová rychlost**, kterou získáme ze vztahu rovnosti těchto sil: $m\frac{{v_k}^2}{r} = \kappa\frac{m M_Z}{r^2} \rightarrow v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_Z}{r}} = \sqrt{\frac{\kappa M_Z r}{r^2}} = \sqrt{a_g r} = \sqrt{K r}$
- kruhovou rychlost pohybu po kružnici okolo Země získáme pro hodnoty $a_g = 9{,}81\, m.s^{-2}$ a $R_Z = 6{,}378.10^6\, m$ a její hodnota je $v_k = 7{,}91\, km.s^{-1}$ → tuto rychlost nazýváme **první kosmická rychlost**
- můžeme získat i **oběžnou dobu** T tělesa po oběžné dráze: $T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v_k} = \frac{2\pi\sqrt{r^2}}{\sqrt{\frac{\kappa M_Z}{r}}} = \frac{2\pi\sqrt{r^3}}{\sqrt{\kappa M_Z}}$, $2\pi r$ je vztah pro kružnicovou trajektorii
- příkladem těles pohybujících se okolo Země po kružnici jsou stacionární družice (družice zůstávají z našeho pohledu stále na stejném místě – jejich oběžná doba je totiž shodná s oběžnou dobou Země kolem své osy, tedy dvacet čtyři hodin)

b) pohyb po elipse kolem Země

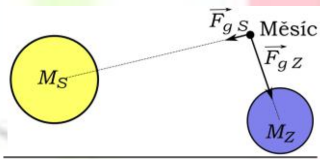
- pokud je rychlost o něco větší než kruhová rychlost v_k, těleso se pohybuje po elipse **eliptickou rychlostí** v_e, kdy pro tuto rychlost platí $\boldsymbol{v_k < v_e < v_p}$, kde v_p je parabolická rychlost
- pro určitá místa máme u eliptické trajektorie zvláštní názvy:
  - **apogeum** (A) – místo, ve kterém má těleso největší vzdálenost od Země (v tomto místě se těleso pohybuje nejpomaleji) → toto vyplývá z druhého Keplerova zákona, ke němuž se dostaneme za chvíli
  - **perigeum** (P) – místo, ve kterém má těleso nejmenší vzdálenost od Země (v tomto místě se těleso pohybuje nejrychleji)

c) pohyb po parabole

- pokud se eliptická rychlost tělesa zvýší, získává **rychlost parabolickou** v_p (těleso se poté pohybuje po parabole) → tuto rychlost také nazýváme únikovou rychlostí z gravitačního pole
- pro parabolickou rychlost platí: $v_p = \sqrt{2\, a_g\, r} = \sqrt{2\frac{\kappa M}{r}} = \sqrt{2}\, v_k$
- pro vzdálenost blízkou k Zemi můžeme použít stejné hodnoty jako pro získání první kosmické rychlosti a získáme **druhou kosmickou rychlost**, jejíž hodnota je asi $v_p = 11{,}2\, km.s^{-1}$ a tato rychlost je minimální rychlost, kterou těleso potřebuje, aby mohlo opustit gravitační pole Země

Gravitační pole Slunce

- nachází se kolem Slunce
- **velikost gravitační síly** Slunce se dá vyjádřit jako: $F_{g\,S} = \kappa\frac{M_S m}{r^2}$, kde M_S je hmotnost Země ($\boldsymbol{M_S = 1{,}989.10^{30}\, kg}$), m je hmotnost tělesa, r je vzdálenost od středu Slunce → tedy $\boldsymbol{r = R_S + h}$, kde R_S je poloměr Slunce ($R_S = 6{,}957\ 10^8\, m$) a h je výška tělesa nad Sluncem
- velikost intenzity se poté dá vyjádřit jako $K = \kappa\frac{M_S}{r^2}$, kde K je intenzita gravitačního pole
- **gravitační pole Slunce je mnohonásobně větší než gravitační pole Země**, ale v blízkosti Země má vliv prakticky pouze gravitační pole Země (dáno závislostí síly i na vzdálenosti těles, nikoli pouze na hmotnostech)

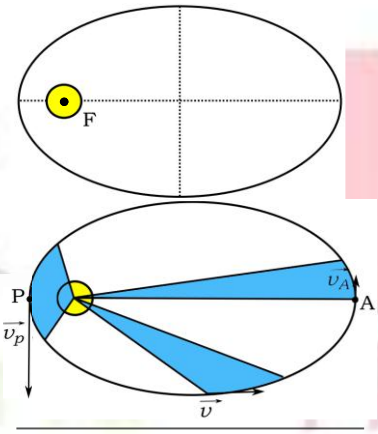


gravitační pole Slunce

POHYBY TĚLES V CENTRÁLNÍM POLI SLUNCE

- pro **kruhovou rychlost** v gravitačním poli Slunce platí: $v_k = \sqrt{\frac{\kappa M_S}{r}}$
    - jedná se o rychlost, kterou planety **obíhají Slunce** → jednotlivé rychlosti oběhu planet závisí na jejich vzdálenosti od Slunce (závislost vzdálenosti planety na kruhové rychlosti vyjadřuje jmenovatel)
    - někdy kruhovou rychlost v gravitačním poli Slunce označujeme jako orbitální nebo oběžnou
- stejně jako u Země můžeme vyjádřit **oběžné doby** T planet po oběžné dráze: $T = \frac{s}{v} = \frac{2\pi r}{v_k} = \frac{2\pi\sqrt{r^2}}{\sqrt{\frac{\kappa M_S}{r}}} = \frac{2\pi\sqrt{r^3}}{\sqrt{\kappa M_S}}$, kde r je vzdálenost planety od středu Slunce
- ke gravitačnímu poli Slunce se vztahuje **třetí kosmická rychlost** (někdy také jako úniková rychlost z gravitačního pole Slunce, hyperbolická rychlost) – tedy minimální rychlost, kterou je tělesu nutno dodat, aby bylo schopno opustit gravitační pole Slunce
    - je dána vztahem: $v_3 = \sqrt{\frac{2\kappa M_S}{r}}$, kde M_S je hmotnost Slunce

KEPLEROVY ZÁKONY



první a druhý Keplerův zákon

- stanovil je **Johannes Kepler** v 17. století
- určují nám pohyby těles v gravitačním poli Slunce (tedy planet, komet, …)
- jsou 3:

a) **<u>první Keplerův zákon</u>** (zákon oběžných drah) – *„Planety obíhají kolem Slunce po elipsách málo odlišných od kružnic, v jejichž společném ohnisku je Slunce."*

b) **<u>druhý Keplerův zákon</u>** – *„Obsahy ploch opsaných průvodičem planety za jednotku času jsou konstantní."*
- **průvodič** = úsečka spojující planetu a střed Slunce
- opět máme speciální názvy pro některá místa trajektorie:
    1) <u>afélium</u> (A) – místo, v němž má těleso největší vzdálenost od Slunce
    2) <u>perihélium</u> (P) – místo, v němž má těleso nejmenší vzdálenost od Slunce
- tento zákon nám dokazuje, že v oblasti afélia se těleso pohybuje nejpomaleji, v místě perihélia nejrychleji

c) **<u>třetí Keplerův zákon</u>** – *„Poměr druhých mocnin oběžných dob dvou planet se rovná poměru třetích mocnin hlavních poloos jejich trajektorií:* $\frac{T_1^2}{T_2^2} = \frac{a_1^3}{a_2^3}$.*"*
- hlavní poloosa je úsečka, která spojuje střed elipsy a hlavní vrchol (v našem případě P a A)